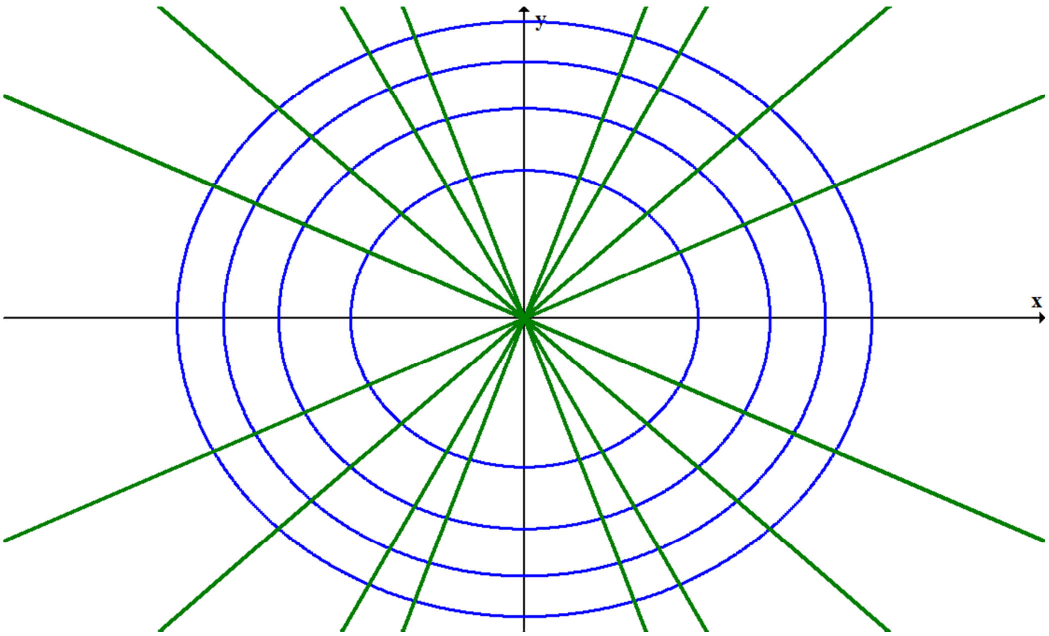
מתמטיקה

להנדסה



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה להנדסה והוא מתאים
לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתרwww.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

פרק 1.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים

1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$

3) $(1-x)y'=y^2$

4) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

5) $y(2)=1 \;\; ; \;\; (x-1)\frac{dy}{dx}=4y$

6) $y(1)=-1 \;\; ; \;\; \frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9$

7) $(x^2y-2+2x^2-y)dx-(xy^2-4-4x+y^2)dy=0$

8) $dy=2t(y^2+4)dt$

9) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

10) $y(\pi)=1 \;\; ; \;\; y'+y^2\sin x=0$

11) $y(0)=4 \;\; ; \;\; \frac{dy}{dx}=y\sec^2 x$

תשובות:

(1) $y=\pm\sqrt{x^2+k}$ (2) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$ (3) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c}$, $y=0$

(4) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$ (5) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$ (6) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

(7) $\frac{x^2}{2}+x=\frac{y^2}{2}+c$, $y=-2$ (8) $y=2\tan(2t^2+k)$ (9) $x=1+\tan(t+c)$

(10) $y=-\frac{1}{\cos x}$ (11) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$ (12) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

פרק 1.2 - משוואות הומוגניות

1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

3) $(y^3 + x^3)dx + xy^2 dy = 0$

4) $y' = \dfrac{4y - 3x}{2x - y}$

5) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

6) $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

7) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$

8) $y' = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}$

9) $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad ; \quad y(1) = 0$

10) $(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0$

11) נתונה המשוואה $(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות:

(3) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right| + c\ ,\ y = -\frac{x}{2^{1/3}}$

(4) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln|(y/x)-1| - \frac{5}{4}\ln|(y/x)+3| + c\ ,\ y = x\ ,\ y = -3x$

(5) $-\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c\ ,\ y = 0$

(6) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right| + c\ ,\ y = 0\ ,\ y = -2x$

(7) $\ln|x| = -\sin(y/x) + c$ (8) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c\ ,\ y = 0$ (9) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$

(10) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right| + c\ ,\ x(t) = 0\ ,\ x(t) = t$

(11) $n = 1,\ \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2(x/y)^2\right) + c$

פרק 1.3 - משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x+y}{2+x+y}$

3) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

5) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

6) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות:

(2) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1)+\frac{1}{4}+c\ ,\ \ y=-x-1.5$

(3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

(4) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ ,\ \ y=x-3\ ,\ \ y=-x-1$

(5) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+(-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c\ ,$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ \ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

(6) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

פרק 1.4 - משוואות מדויקות

1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה

פתור את המשוואות הבאות :

2) $\left(2x^3+3y\right)dx+(3x+y-1)dy=0$

3) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

4) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

5) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0$

6) $\left(y^2-\dfrac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

7) $(2x^2t-2x^3)dt+(4x^3-6x^2t+2xt^2)dx=0$

8) נתונה המשוואה $(3x^2+ye^{xy})dx+(2y^3+kxe^{xy})dy=0$ באשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות:

(2) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$ (3) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$ (4) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

(5) $x-\dfrac{y^2\cos 2x}{2}-\dfrac{y^2}{2}=c$ (6) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

(7) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$ (8) $k=1$, $x^3+e^{xy}+\dfrac{y^4}{2}=c$

פרק 1.5 - הפיכת משוואה לא מדוייקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה)

1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדויקת.

2) הראה שהמשוואה $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

3) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

4) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדוייקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה xe^x.

5) פתור את המשוואה $\left(x^2+y^2+x\right)dx+\left(xy\right)dy=0$.

6) פתור את המשוואה $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$.

7) פתור את המשוואה $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$.

8) פתור את המשוואה $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$.

9) פתור את המשוואה $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$.

10) פתור את המשוואה $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$.

תשובות:

(2) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$ (3) $e^x\sin y+2y\cos x=c$ (4) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

(5) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$ (6) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-x=c$ (7) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

(8) $x-\frac{x}{y}=c$ (9) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$ (10) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

פרק 1.6 - משוואה לינארית

1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

3) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

4) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3$

5) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$

6) $y(0)=1\ ;\ \frac{dy}{dt}+y=2+2t$

7) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$

8) $y'-2y\cot x=1$

9) $z(\pi)=0\ ;\ x^2z'+2xz=\cos x$

תשובות:

(2) $y=2+C\cdot e^{-x^2}$ (3) $y=x\left[\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+C\right]$ (4) $y=(x-2)\left[x^2-4x+C\right]$

(5) $y=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x^3e^{\frac{1}{x^2}}$ (6) $y=2t+e^{-t}$ (7) $y=\frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x}+C\right]$

(8) $y=\sin^2 x\left[-\cot x+C\right]$ (9) $z=\frac{\sin x}{x^2}$

פרק 1.7 - משוואת ברנולי

1) הגדר את משוואת ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$

3) $(x^2+1)y' - 2xy - y^2 = 0$

4) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2}$

5) $y(1) = 2.5 \quad ; \quad y' - \left(\dfrac{1}{x} + 5x^4\right) y = -x^3 y^2$

6) $z' - \cot x \cdot z = \dfrac{1}{\sin x} z^3$

תשובות:

(2) $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{5x} + c \cdot x^4}}$ (3) $y = \dfrac{x^2+1}{-x+C}$ (4) $y = x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$ (5) $y = \dfrac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

(6) $z = \pm\sqrt{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$

פרק 1.8 - משוואת ריקטי

1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y' = e^{2x} + (1 + \frac{5}{2}e^{x})y + y^2$

3) $y' = -(1 + x + x^2) - (2x+1)y - y^2$

4) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$

5) $y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2y^2 \cos x$

תשובות:

(2) $y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^{x}}$ (3) $y(x) = -0.5e^{x} + \frac{e^{x}}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$

(4) $y(x) = x + \frac{1}{-x + C}$ (5) $y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^{x}}$

פרק 1.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה

בתת-פרק זה מסמנים $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

2) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$

3) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

4) $xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0$

5) $y = 2px + p^4x^2$

6) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$

7) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$

תשובות:

(2) $(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|x| - c_2 \right) = 0$

(3) $(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$

(4) $(y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot (\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2) = 0 \ , \ x > 0$ (5) $y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$

(6) $y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c}$ (7) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$

פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני

פרק 2.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)

1) הגדר משוואה חסרה מדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $x^2y''+xy'=\frac{1}{x}$

3) $y''\tan x-1=y'$

4) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

5) $y''x\ln x=y'$

6) $xy''=x^2e^x+y'$

7) $yy''+\left(y'\right)^2=0$

8) $2y''y-\left(y'\right)^2=1$

9) $x^3y''+x^2y'=1$

תשובות:

(2) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$ (3) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

(4) $y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2$; $y=\pm x+C_3$

(5) $y=C_1(x\ln x-x)+C_2$; $y=C_3$ (6) $y=e^x(x-1)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

(7) $\frac{y^2}{2}=cx+k$; $y=c$ (8) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2(x+k)^1}{4}+1\right]$ (9) $\cot y=-(cx+k)$; $y=c$

פרק 2.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y''-100y=0$

3) $y''-4y'=0$

4) $y''-8y'+7y=0$

5) $4z''+z'-5z=0 \quad ; \quad z(0)=1,\ z'(0)=1$

6) $y''-2y'+y=0$

7) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

8) $y''+4y=0$

9) $y''+10y=0$

10) $y''-2y'+10y=0 \quad ; \quad y(0)=0, y'(0)=1$

11) $5y''+8y'+4y=0$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$ (3) $y=c_1+c_2e^{4x}$ (4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$ (5) $z=e^{x}$

(6) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$ (7) $x(t)=c_1e^{-t/2}+c_2te^{-t/2}$ (8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

(9) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ (10) $y=e^{2}\sin 3x$ (11) $y=e^{-4x/5}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

פרק 2.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y''+5y'+6y=22x+16x^2$

3) $y(0)=2\ ,\ y'(0)=7\ ;\ y''-2y'+y=e^{2x}$

4) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

5) $y''-2y=xe^{-x}$

6) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

9) $z''+z=\sin x$

10) $y''-3y'+2y=e^x$

11) $y''-2y'=6x^2-2x$

12) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

13) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$ (3) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

(4) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$ (5) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

(6) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$ (7) $c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

(8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$ (9) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

(10) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^{x}$ (11) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

(12) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$ (13) $y=e^{-x}\sin 2x$

פרק 2.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות :

2) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

3) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

4) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

5) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}\quad ; \quad y(1)=0\ ,\ y'(1)=0$

6) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

7) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות:

(2) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln\left|\sin x\right|$

(3) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]+x^2e^{-x}\left[\ln x-1\right]$

(4) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\dfrac{6(\sqrt{x+1})^5}{5}-\dfrac{6(\sqrt{x+1})^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

(5) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad(x>0)$

(6) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

(7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|+\sin 2x\cdot x$

פרק 2.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - שיטה אופרטוריות

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^{x} + 11$

3) $(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^{x} - 1$

4) $(D^2 + D - 2)y = 4e^{x} + e^{10x} + 14$

5) $(D^2 + 4)y = \sin 5x$

6) $(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x$

7) $(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x$

8) $(D^2 + 2D - 3)y = 2\cos x \cos 2x$

הערת סימון– $\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad ay'' + by' + cy = Q(x)}$

תשובות:

(2) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

(3) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9}e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

(4) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4xe^{x} + \frac{1}{72}e^{10x} + 7$

(5) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21}\sin 5x$

(6) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80}\sin 4x$

(7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

(8) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{30}\sin 3x - \frac{1}{15}\cos 3x$

פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר n

פרק 3.1 - משוואות לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

2) הקושי העיקרי בפתרון משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים הוא בפתרון המשוואה האופיינית. צטט מספר משפטים מתחום האלגברה שבעזרתם נוכל לפתור את המשוואה האופיינית ביתר קלות.

פתור את המשוואות הבאות :

3) $y'''-2y''-3y'=0$

4) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=0$

5) $y'''-2y''-y'+2y=0$

6) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

7) $y^{(4)}-y=0$

8) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+20y=0$

9) $y^{(4)}+y=0$

10) $y^{(6)}-y''=0$

11) $\left(D^5+3D^4+2D^3-2D^2-3D-1\right)y=0$

12) $y^{(8)}+8y^{(4)}+16y=0$

13) $z'''-6z''+12z'-8z=0$

14) $y^{(4)}-4y=0$

15) $x^{(6)}-3x^{(4)}+3x''-x=0$

16) $y(0)=3,\ y'(0)=4,\ y''(0)=-1\ ;\ y'''-y''+y'-y=0$

17) $y(0)=2\ ,\ y'(0)=5\ ,\ y''(0)=-19,\ y'''(0)=-47;\ y''''-3y'''+6y''-12y'+8y=0$.

18)נתונה מד״ר הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6 אשר אחד הפתרונות שלה הוא

$x^2e^x\cos 2x$. א. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה   ב. מצא את המד"ר.

תשובות:

(3) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$ (4) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}$

(5) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$ (6) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$

(7) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{0x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]$ (8) $y=c_1e^{-4x}+e^{x}\left[c_2\cos 2x+c_3\sin 2x\right]$

(9) $y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

(10) $y=c_1+c_2x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}+\cos x+\sin x$

(11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+c_4x^2e^{-x}+c_5x^3e^{-x}$

(12) $y=e^{x}\left[c_1\cos x+c_2\sin x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]+e^{-x}\left[c_5\cos x+c_6\sin x\right]+xe^{-x}\left[c_7\cos x+c_8\sin x\right]$

(13) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3x^2e^{2x}$

(14) $y=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x$

(15) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}+c_4e^{-x}+c_5xe^{-x}+c_6x^2e^{-x}$

(16) $y=e^{x}+2\cos x+3\sin x$ (17) $y=e^{x}-2e^{2x}+3\cos 2x+4\sin 2x$

(18) (a) $y=e^{x}\left[c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right]+xe^{x}\left[c_3\cos 2x+c_4\sin 2x\right]+x^2e^{x}\left[c_5\cos 2x+c_6\sin 2x\right]$

(b) $y''''''-6y'''''+27y''''-68y'''+135y''-150y'+125y=0$

פרק 3.2 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $y'''-2y''-3y'=2\sin x-4\cos x$

3) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=-28e^{2x}$

4) $y'''-2y''-y'+2y=2x^3-3x^2-12x+14$

5) $y'''-3y'+2y=e^x$

6) $y'''-y''+y'-y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

7) $y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=2\ ;\ y'''-y'=4e^{-x}+3e^{2x}$

8) $y^{(4)}+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$

תשובות:

(2) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}+\sin x$ (3) $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+e^{2x}$

(4) $y=c_1e^{2x}+c_2e^x+c_3e^{-x}+x^3+4$ (5) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-2x}+\frac{1}{6}x^2e^x$

(6) $y=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{4}x(\cos x-\sin x)$ (7) $y=-4.5+4e^{-x}+2xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{2x}$

(8) $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x+\frac{1}{4}x^4-3x^2+x\sin x+2x\cos x$

פרק 3.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית,עם מקדמים קבועים -וריאציית פרמטרים

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות :

2) $y'''+y'=\dfrac{1}{\cos x}$

3) $y'''-3y''+2y'=\dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$

4) $y'''-3y''+3y'-y=\dfrac{e^x}{x}$

תשובות:

(2) $y=c_1+c_2\cdot\cos x+c_3\cdot\sin x+\ln\left|\tan x+\dfrac{1}{\cos x}\right|-x\cos x+\sin x\ln\left|\cos x\right|$

(3) $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+\dfrac{1}{2}\left(e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^x\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)+e^{2x}\left(-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)$

(4) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x-\dfrac{3}{4}x^2e^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x\ln\left|x\right|$

פרק 3.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות/אופרטוריות

1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות:

2) $\left(D^3-2D^2-3D\right)y=4e^x-10e^{-2x}$

3) $y^{(4)}+3y'''-15y''-19y'+30y=10e^{4x}+2e^x-1$

4) $\left(D^4-6D^3+13D^2-12D+4\right)y=10e^x+4e^{2x}$

5) $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=24e^x+81e^{4x}$

6) $\left(D^6+D^4+D^2\right)y=104\sin(2x+1)+\cos(x+10)$

7) $\left(D^5-8D^4+22D^3-28D^2+17D-4\right)y=-5\sin 2x$

8) $(D^4-3D^3+6D^2-12D+8)y=30\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+48\cos^2 x-16$

תשובות:

(2) $y=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-e^x+e^{-2x}$

(3) $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-5x}+\frac{5}{81}e^{4x}-\frac{1}{18}xe^x-\frac{1}{30}$

(4) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+5x^2e^x+2x^2e^{2x}$

(5) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}-\frac{1}{3}x^4e^x+xe^{4x}$

(6) $y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+c_5e^{3x}+c_6e^{-3x}-2\sin(2x+1)-\cos(x+10)$

(7) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+c_4x^3e^x+c_5e^{4x}+\frac{1}{500}\left[4\sin 2x-22\cos 2x\right]$

(8) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x+\frac{5\sin x+25\cos x}{26}+\frac{-3\cos 2x-18\sin 2x}{37}+1$

פרק 4 - התמרת לפלס

פרק 4.1 - התמרת/טרנספורם לפלס

1)הגדר והדגם את המושג התמרת לפלס.
חשב את התמרות לפלס הבאות בעזרת טבלת התמרות לפלס :

2) $L\left(t^2+4t-2\right)$ 3) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$ 4) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$ 5) $L\left(\cosh 4t\right)$

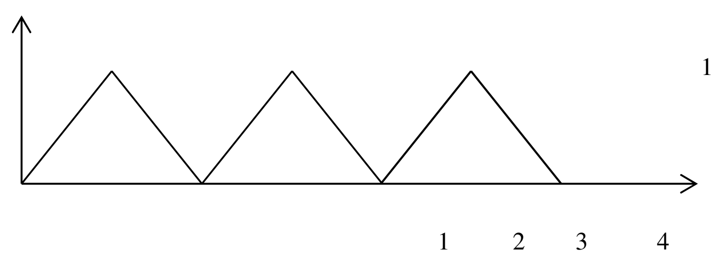
6) $L\left(\sinh 10t\right)$ 7) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$ 8) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$ 9) $L\left(\sin^2 t\right)$

10) $L\left(\cos^2 4t\right)$ 11) $L\left(t^2\sin 4t\right)$ 12) $L\left(t^4e^{2t}\right)$ 13) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

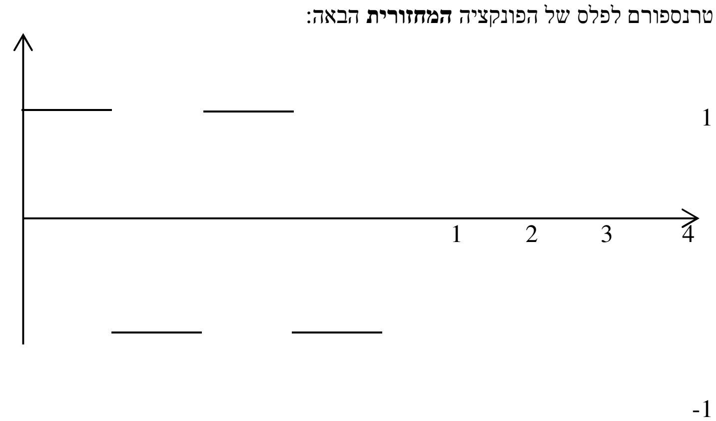
14) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & 1<t \end{cases}$.

15) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

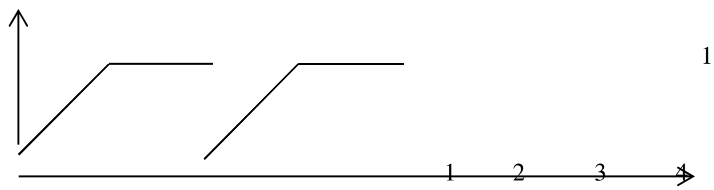
16) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



17) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



18) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



19) הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

20) שרטט את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

21) רשום את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$ בעזרת פונקציית המדרגה.

22) רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$, של הפונקציה $u(t-k)$

ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

23) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

<u>תשובות:</u>

(2) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$ (3) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$ (4) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$ (5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

(6) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$ (7) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$ (8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$ (9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

(10) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$ (11) $\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3}$ (12) $\frac{24}{(s-2)^5}$ (13) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$ (14) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

(15) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$ (16) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$ (17) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$ (18) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

(21) $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$ (23) $\frac{2e^{-4s}}{s^3}$ (24) $\frac{2e^{-4s}(8s^2+4s+1)}{s^3}$

פרק 4.2 - התמרת לפלס ההפוכה ומשפט הקונוולוציה

חשב את התמרת לפלס ההפוכה :

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ 2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$ 3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$ 5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$ 6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$ 8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$ 9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$ 11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$ 12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$ 14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$ 15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$ 17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$ 18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$ 20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right)$ 21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$ 23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{\left(s^2+1\right)(s-3)}\right)$ 24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$ 26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$ 27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$ 29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

- בשאלה 27 הוסף סעיף ב המבקש לשרטט את הפתרון.

30) נתון $F(s)=\dfrac{e^{-s}+2}{s}$ חשב את $f(0)$ ו- $f(\infty)$ כאשר $f(t)=L^{-1}\left(F(s)\right)$.
פתור בשתי דרכים שונות.
הערה: $f(0)=\lim\limits_{t\to 0} f(t)\quad , \quad f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$

31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב:

32) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^3(s-4)}\right)$ 33) $L^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s-4)^2}\right)$ 35) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

<u>תשובות:</u>

(1) 1 (2) $\dfrac{t^3}{3!}$ (3) e^{10t} (4) $\dfrac{1}{3}\sin 2t$ (5) $\cos 2t$ (6) $e^{10t}\dfrac{1}{2}\sin 2t$ (7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\dfrac{1}{2}\sin 2t\right\}$

(8) $\dfrac{1}{4}t\sin 2t$ (9) $\dfrac{1}{2\cdot 2^3}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$ (10) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$ (11) $\dfrac{1}{4}e^{2t}-\dfrac{1}{4}e^{-2t}$ (12) $1-2e^{-5t}$

(13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$ (14) $1+\dfrac{1}{2}e^{t}-\dfrac{1}{2}e^{-t}$ (15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$ (16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

(17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$ (18) $-6+5t+6e^{-2t}$ (19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$ (20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

(21) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$ (22) $\dfrac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$ (23) $\sin t+2e^{3t}$ (24) $\cos t+e^{-2t}$ (25) $\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t$

(26) $e^{t}-\cos 2t-\dfrac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\dfrac{5}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)$ (27) $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

(28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$ (29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$ (30) $f(0)=2\quad f(\infty)=3$

(32) $-\dfrac{1}{2}(t^2+2t+2)+e^{t}$ (33) $0.5t-\dfrac{1}{4}\sin 2t$ (34) $\dfrac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\dfrac{1}{4}$ (35) $\dfrac{1}{2}(-2\cos t+2-t\sin t)$

פרק 4.3 - פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

1)א. הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לינארית, מסדר שני, לא הומוגנית במקדמים קבועים על ידי התמרת לפלס.
ב.הסבר כיצד פועלים אם המד"ר מסדר כלשהו.
פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס

2) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

3) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

4) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

5) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

6) $y(0)=y'(0)=\dfrac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^t+e^t$

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$

כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\ge 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

הערה: יש המסמנים $u(t-4)=u_4(t)$

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$

כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\ge 1\end{cases}$

9) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$

כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$.

10) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

תשובות:

(2) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$ (3) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$ (4) $y(t)=-4t-1$ (5) $y(t)=t^2$

(6) $y(t)=\dfrac{1}{8}e^t(t^2+2)$ (7) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

(8) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

(9) $y(t)=\dfrac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\dfrac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

(10) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

דפי נוסחאות (נגזרות, אינטגרלים, טריגו, אלגברה, טורי טילור, התמרות לפלס)

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=(\pi-\alpha)+2\pi k\end{cases}\\ \cos x=\cos\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{cases}\\ \tan x=\tan\alpha\Rightarrow\ x=\alpha+\pi k\\ \cot x=\cot\alpha\Rightarrow x=\alpha+\pi k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow\ x=\pi k\\ \cos x=0\Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\\a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\\a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)\\a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^m a^n=a^{m+n}\\ \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\\ \left(a^m\right)^n=a^{mn}\\ (ab)^n=a^n b^n\\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\\ a^0=1\\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\\ \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\\ e^x=b\ \Rightarrow\ x=\ln b\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>0,b>0\\ \ln a+\ln b=\ln ab\\ \ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}\\ \ln 1=0\ ,\ \ln e=1\\ \ln e^n=n\\ \ln x^n=n\ln x\ (x>0)\\ e^{\ln x}=x\\ e^{k\ln x}=x^k\\ e^{-k\ln x}=\dfrac{1}{x^k}\\ a^b=e^{b\ln a}\\ \ln x=k\ \Rightarrow\ x=e^k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c\\ \\ \begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases}a & if\ \ a\ge 0\\ -a & if\ \ a<0\end{cases}\\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|\\ \left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\\ |x|<a\ \Leftrightarrow\ -a<x<a\\ |x|>a\ \Leftrightarrow\ x<-a\ or\ x>a\end{cases}$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות טור מקלורן

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad -1 \le x \le 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \qquad -1 < x < 1$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&-1 \le x \le 1 \ (m>0) \\ &-1 < x \le 1 \ (-1<m<0) \\ &-1 < x < 1 \ (m \le -1) \\ &m \ne 0,1,2,3,\dots\end{aligned}$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(for $n = 1, 2, 3\ldots$) t^n
$\frac{1}{s^n}$	(for $n = 1, 2, 3\ldots$) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$
$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}

$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at)-at\cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$
e^{-ks}	$\delta(t-k)$

תכונות נוספות

$$L[ag(t)+bh(t)]=aL[g(t)]+bL[h(t)]$$ (1

$$L^{-1}\left[aG(s)+bH(s)\right]=aL^{-1}[G(s)]+bL^{-1}[H(s)]$$ (2

$$L^{-1}[F(s)]=e^{-at}L^{-1}[f(s-a)] \quad , \quad L^{-1}[F(s)]=e^{at}L^{-1}[f(s+a)]$$ (3

$$L\left[ay'(t)+by(t)\right]=Y(s)[as+b]-y(0)[a]$$ (4

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=Y(s)[as^2+bs+c]-y(0)[as+b]-y'(0)[a]$$

$$L\left[ay'''(t)+by''(t)+cy'(t)+dy(t)\right]=$$

$$Y(s)[as^3+bs^2+cs+d]-y(0)[as^2+bs+c]-y'(0)[as+b]-y''(0)[a]$$

$$L\left[ay''''(t)+by'''(t)+cy''(t)+dy'(t)+ey(t)\right]=$$

$$Y(s)[as^4+bs^3+cs^2+ds+e]-y(0)[as^3+bs^2+cs+d]$$
$$-y'(0)[as^2+bs+c]-y''(0)[as+b]-y'''(0)[a]$$

לדף התמרות לפלס מורחב
http://www.gool.co.il/laplace_table.pdf

סיכום מד"ר

משוואות הניתנות להפרדת משתנים

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה: $f(x)dx = g(y)dy$

אז הפתרון ניתן ע"י: $\int f(x)dx = \int g(y)dy$

משוואות הומוגניות (ניתנות להפרדת משתנים בעזרת הצבה מתאימה)

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

כאשר $M(x,y)$ וגם $N(x,y)$ הומוגניות מאותו סדר !

מציבים: $y = v \cdot x$, $dy = dv \cdot x + dx \cdot v$

ומקבלים מד"ר הניתנת להפרדת משתנים.

לאחר האינטגרציה יש להציב $\frac{y}{x}$ במקום v.

הערה: פונקציה $f(x,y)$ **תקרא הומוגנית מסדר** n **אם** $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$

מקרה I - $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

פותרים את מערכת המשוואות $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$
ומקבלים $x=h$ ו- $y=k$.
מציבים $x=X+h,\ y=Y+k$ ומקבלים מד"ר הומוגנית מסדר ראשון.

מקרה II - $a_1b_2 = a_2b_1$.

במקרה זה:
1. **מציבים**: $z=a_1x+b_1y+c_1$

2. **גוזרים**: $\frac{dz}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}$

$$dy=\frac{1}{b_1}\left(dz-a_1dx\right)$$

ומקבלים משוואה הניתנת להפרדת משתנים במשתנים z ו- x.

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $y'+a(x)y=b(x)$.

הפתרון ניתן ע"י: $y=e^{-A(x)}\left[\int b(x)e^{A(x)}dx+C\right]$ $\left(A(x)=\int a(x)dx\right)$

זכור:

1) $e^{-k\ln f(x)}=\frac{1}{\left(f(x)\right)^k}$, $e^{k\ln f(x)}=\left(f(x)\right)^k$

2) $\int e^f f'dx=e^f$

משוואת ברנולי (לינארית על ידי הצבה)

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה: $y'+a(x)y=y^nb(x)$

אז ההצבה $v=y^{1-n}$ הופכת את המד"ר למד"ר ליניארית מסדר ראשון:

$v'+\left((1-n)\cdot a(x)\right)v=(1-n)\cdot b(x)$.

משוואות מדויקות

אם ניתן להביא את המד"ר לצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

כך שמתקיים: $M_y=N_x$

אז המשוואה נקראת מדוייקת.

פתרון המשוואה נתון ע"י: $F(x,y)=c$

כאשר ידוע ש: $F_y=N$ **ו-** $F_x=M$

אלגוריתם פתרון:

1. $F(x,y)=C$
2. $F_x=M$
3. $F=\int Mdx=g(x,y)+h(y)$
4. $F_y=N \Rightarrow g_y+h'(y)=N \Rightarrow h(y)=...$
5. $F=g(x,y)+h(y)=C$

הערה: במידה והאינטגרל $F=\int Mdx$ מסובך, ניתן להתחיל מ- $F=\int Ndy$.

משוואות כמעט מדויקות (מדוייקות לאחר הכפלה בגורם אינטגרציה)

נתונה משוואה: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ומתקיים: $M_y \neq N_x$

במקרה כזה המשוואה אינה מדויקת.

ייתכן שקיים גורם אינטגרציה $h(x,y)$ שאם נכפול אותו במשוואה המקורית

נקבל משוואה מדויקת.

כלומר המשוואה $h(x,y)M(x,y)dx+h(x,y)N(x,y)dy=0$ היא מדויקת.

במידה וגורם האינטגרציה אינו מופיע בשאלה מצאו אותו בעזרת השיטות הבאות:

1. אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$ אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.
2. אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$ אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.
3. אם לאחר כינוס איברי המשוואה אתם מזהים את קבוצת האיברים מימין אז השתמשו בגורם האינטגרציה משמאל.

קבוצת איברים	גורם אינטגרציה
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2}$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{y^2}$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{xy}$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$
$xdy+ydx$	$\frac{1}{(xy)^n}$
$xdx+ydy$	$\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^n}$

משוואות מסדר ראשון וממעלות גבוהות

המשוואה הכללית מסדר ראשון וממעלה n נתונה ע"י :

$$a_0(x,y)+a_1(x,y)p^1+a_2(x,y)p^2+...+a_n(x,y)p^n=0 \qquad ; \qquad p=y'=\frac{dy}{dx} \qquad (*)$$

סוג I - משוואות פתירות עבור p

במקרה זה מתייחסים לאגף שמאל של (*) כאל פולינום ב- p .

משווים את הפולינום לאפס ומקבלים : $p=F_1(x,y),\, p=F_2(x,y),...,\, p=F_n(x,y)$

פותרים את המשוואות שהתקבלו, כל אחת מהצורה $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ שפתרונה מהצורה $f(x,y,c)=0$. הפתרון של (*) הוא המכפלה $f_1(x,y,c)\cdot f_2(x,y,c)\cdot ...\cdot f_n(x,y,c)=0$.

סוג II– משוואות פתירות עבור y

כלומר, משוואות מהצורה $y=f(x,p)$.

נגזור לפי x את שני האגפים ונקבל : $p=f_x+f_p\cdot\frac{dp}{dx}$

משוואה פתירה עבור p . נפתור ונקבל את p .

נציבו אותו ב- $y=f(x,p)$ ומכאן y .

סוג III– משוואות פתירות עבור x

כלומר, משוואות מהצורה $x=f(y,p)$.

נגזור לפי y את שני האגפים ונקבל : $\frac{1}{p}=f_y+f_p\cdot\frac{dp}{dy}$

משוואה פתירה עבור p . נפתור ונקבל את p .

נציבו אותו ב- $x=f(y,p)$ ומכאן y .

הורדת סדר המשוואה

1) אם המשוואה היא מהצורה $f(x,y',y'')=0$ אז מציבים $y'=z(x),\quad y''=z'$

ופותרים מד"ר מסדר ראשון בשיטות הרגילות.

לבסוף $y'=z(x) \quad \Leftarrow \quad y=\int z(x)dx$:.

2) אם המשוואה היא מהצורה $f(y,y',y'')=0$ אז מציבים $y'=z(y),\quad y''=z'\cdot z$

ופותרים מד"ר מסדר ראשון בשיטות הרגילות.

לבסוף: $\frac{dy}{dx}=z(y) \quad \Leftarrow \quad \int \frac{1}{z(y)}dy=\int dx$.

משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים

הצורה הכללית של משוואה הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \qquad (1)$$

אלגוריתם פתרון:

1. נרשום את הפולינום האופייני של המשוואה (1) לפי $y^{(n)} \Rightarrow k^n$ ונמצא את שורשיו.

2. נחלק את השורשים לקבוצות:

קבוצה ראשונה – שורשים ממשיים ושונים $k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_m$

תרומתם לפתרון הכללי: $c_1 e^{k_1 x}+c_2 e^{k_2 x}+\ldots+c_m e^{k_m x}$

קבוצה שנייה – שורשים ממשיים ושווים $k_1=k_2=\ldots=k_m=\boldsymbol{k}$ **(שורש מריבוי $\boldsymbol{m}$)**

תרומתם לפתרון הכללי: $c_1 e^{kx}+c_2 x e^{kx}+c_3 x^2 e^{kx}+\ldots+c_m x^{m-1}e^{kx}$

קבוצה שלישית – שורשים מרוכבים

כל זוג שורשים מרוכבים $k_{1,2}=a\pm bi$ תורם לפתרון הכללי :

$$e^{ax}\left[c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right]$$

הערה: במידה ומתקיים $k_{1,2}=a\pm bi$, $k_{3,4}=a\pm bi$ רושמים:

$$e^{ax}\left[c_1\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right]+e^{ax}\left[c_1 x\cdot\cos(bx)+c_2 x\cdot\sin(bx)\right]$$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים

הצורה הכללית של משוואה לא הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x) \quad (1)$$

הפתרון הכללי של (1) הוא $y=y_h+y_p$

כאשר : y_h הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל- (1). (מסמנים גם $\overline{y}$).

y_p הוא פתרון פרטי של (1). (מסמנים גם $y*$).

להלן שיטת השוואת מקדמים למציאת הפתרון הפרטי :

מכינים רשימה המכילה את כל הפונקציות שמופיעות ב- $Q(x)$ והפונקציות המתקבלות מ- $Q(x)$ עלידי גזירה. כאשר בכל אחת מהפונקציות הנ"ל מתעלמים מהקבועים.
נניח שרשימת הפונקציות שהתקבלו מהתהליך הנ"ל היא $f_1(x),f_2(x),...,f_t(x)$
אזי, פתרון פרטי יהיה מהצורה $y_p=A\cdot f_1(x)+B\cdot f_2(x)+C\cdot f_3(x)+...+G\cdot f_t(x)$ (3)

כאשר $A,B,C,...,G$ הם קבועים. למשל,

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=x^3$ פתרון פרטי $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=e^x+e^{3x}$ פתרון פרטי $y_p=Ae^x+Be^{3x}$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=\sin 2x$ פתרון פרטי $y_p=A\sin(2x)+B\cos(2x)$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=xe^{-x}$ פתרון פרטי $y_p=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=e^{2x}\cos 4x$ פתרון פרטי $y_p=Ae^{2x}\cos 4x+Be^{2x}\sin 4x$

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_ny=3x^2+x\cdot\cos 4x$ פתרון פרטי

$$y_p=Ax^2+Bx+C+D\cos 4x+E\sin 4x+Fx\cos 4x+Gx\sin 4x$$

מהצבת (3) ב (1) נוכל למצוא את הקבועים $A,B,C,...,G$.

יש לשנות את התהליך במקרה הבא:

אם אחד (או יותר) מהמחוברים בפתרון הפרטי הראשוני ,מופיע בפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה יש לכפול אותו (אותם) בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x שמניבה פונקציה שאין בה שום מחובר שמופיע בפתרון ההומוגני או בפתרון הפרטי הראשוני.**למשל:**

נתבונן במשוואה $y'''-y''-8y'+12y=\underbrace{e^{2x}+x^2}_{Q(x)}$

הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא $y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-3x}$.

פתרון פרטי **ראשוני** $y_p^{\text{ראשוני}}=Ax^2+Bx+C+De^{2x}$. עתה, ב- $y_p^{\text{ראשוני}}$ מופיע המחובר De^{2x} שמופיע גם בפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה לכן עלינו להכפיל אותו בחזקה הטבעית הקטנה ביותר של x שתניב פונקציה שאין בה שום מחובר שמופיע במד"ר ההומוגנית או בפתרון הפרטי הראשוני. מכאן שעלינו להכפיל את De^{2x} ב- x^2 ולרשום את הביטוי שהתקבל $Dx^2\cdot e^{2x}$ בפתרון הפרטי. נקבל אם כן שהפתרון הפרטי הוא מן הצורה $y^*=Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים

הצורה הכללית של משוואה לא הומוגנית מסדר n עם מקדמים קבועים היא :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \quad (1)$$

הפתרון הכללי של (1) הוא $y = y_h + y_p$

כאשר : y_h הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל- (1). (מסמנים גם $\bar{y}$).

y_p הוא פתרון פרטי של (1). (מסמנים גם y^*).

להלן שיטת וריאציית הפרמטרים למציאת הפתרון הפרטי:

(היות ובד״כ מדובר על מד״ר מסדר שני או שלישי נתחיל בכך)

מד״ר מסדר שני –

רוצים פתרון פרטי עבור $ay'' + by' + cy = Q(x)$

<u>שלב I</u>

פותרים את המד״ר ההומוגנית המתאימה : $ay'' + by' + cy = 0$ ומקבלים $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

<u>שלב II</u>

מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי : $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

<u>שלב III</u>

מציבים בנוסחה : $y_p = y_1(x)\int \frac{-y_2(x)Q(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)Q(x)}{W(x)}dx$

מד"ר מסדר שלישי –

רוצים פתרון פרטי עבור $ay'''+by''+cy'+dy=Q(x)$

<u>שלב I</u>

פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה : $ay'''+by''+cy'+dy=0$
ומקבלים $y_h=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$

<u>שלב II</u>

מחשבים את : $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_2'' \end{vmatrix}$

מחשבים את : $W_3(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & 1 \end{vmatrix}$, $W_2(x)=\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & 1 & y_2'' \end{vmatrix}$, $W_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ 1 & y_2'' & y_2'' \end{vmatrix}$

<u>שלב III</u>

מציבים בנוסחה : $y_p=y_1\int\frac{W_1\cdot Q}{W}dx+y_2\int\frac{W_2\cdot Q}{W}dx+y_3\int\frac{W_3\cdot Q}{W}dx$

מד"ר מסדר n–

<u>שלב I</u>
פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה ומקבלים $y_h=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$

<u>שלב II</u>

מחשבים את הוורונסקיאן W הנתון על ידי: $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

מחשבים את $W_1,W_2,\ldots,W_n$, כאשר W_i היא הדטרמיננטה המתקבלת מהוורונסקיאן W
על ידי החלפת העמודה ה- i בוקטור העמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>שלב III</u>
מציבים בנוסחה : $y_p=y_1\int\frac{W_1\cdot Q}{W}dx+y_2\int\frac{W_2\cdot Q}{W}dx+\ldots+y_n\int\frac{W_n\cdot Q}{W}dx$

משוואות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים - שיטות קצרות (שיטה אופרטורית)

משוואה לינארית לא הומוגנית במקדמים קבועים היא משוואה מהצורה

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + ... + A_2 y'' + A_1 y' + A_0 y = Q(x)$$

בשיטה האופרטורית מסמנים: $y' = Dy \ , \ y'' = D^2 y \ , \ ...$ (D אופרטור הגזירה),
ומקבלים:

$$\left(A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} +,,, + A_2 D^2 + A_1 D + A_0\right) y = Q(x)$$

או בקיצור

$$F(D) y = Q(x)$$

פתרון המשוואה נתון על ידי $y = y_h + y_p$

y_h - פתרון המשוואה $F(D) y = 0$

y_p - פתרון פרטי של המשוואה $F(D) y = Q(x)$

מציאת y_p

1. אם המד"ר מהצורה $F(D) y = e^{ax+b}$ אז $y_p = \frac{1}{F(D)} e^{ax+b} = \frac{1}{F(a)} e^{ax+b}$

   במידה והמכנה מתאפס ניעזר בנוסחה $\frac{1}{(D-a)^n} e^{ax+b} = \frac{x^n}{n!} e^{ax+b}$.

2. א. אם המד"ר מהצורה $F(D^2) y = \sin(ax+b)$

   אז $y_p = \frac{1}{F(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{F(-a^2)} \sin(ax+b)$.

ב. אם המד"ר מהצורה $F(D)y=\sin(ax+b)$

אז:

* רשום $y_p=\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b)$

* החלף כל הופעה של D^2 ב- $-a^2$.

* לאחר ההחלפה הנ"ל תקבל:

$$\frac{1}{AD+B}\sin(ax+b)$$

$$\frac{1}{AD+B}\frac{AD-B}{AD-B}\sin(ax+b)$$

$$\frac{AD-B}{A^2D^2-B^2}\sin(ax+b)$$

$$\frac{AD-B}{A^2(-a^2)-B^2}\sin(ax+b)$$

$$\frac{AD\sin(ax+b)-B\sin(ax+b)}{A^2(-a^2)-B^2}$$

$$\frac{A\cos(ax+b)a-B\sin(ax+b)}{A^2(-a^2)-B^2}$$

* אם במקום קוסינוס רשום סינוס פועלים באופן זהה.

.3

$$F(D)\left[e^{ax}h(x)\right]=e^{ax}F(D+a)h(x)$$

$$\frac{1}{D+2}e^{3x}\sin x=e^{3x}\frac{1}{D+5}\sin x$$

התמרת לפלס

הגדרה:

התמרת לפלס של פונקציה $g(t)$ שתסומן ב- $L[g(t)]$ הוא פונקציה חדשה במשתנה s שתסומן ב-
$G(s)$ והמוגדרת ע"י: $G(s) = L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$

ההתמרה ההפוכה נתונה ע"י: $L^{-1}[G(s)] = g(t)$

כללים:

1. אם $g(t)$ מחזורית עם מחזור ω אז התמרת לפלס נתונה ע"י: $G(s) = \dfrac{\int_0^\omega e^{-st} g(t)dt}{1-e^{-\omega s}}$

זכור:

$$\int e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int e^{-st} \cdot tdt = -\frac{1}{s^2}e^{-st}(st+1)$$

$$\int e^{-st} \cdot t^2 dt = -\frac{1}{s^3}e^{-st}(s^2t^2+2st+2)$$

$$\int e^{-st} \sin(at)dt = \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}[-s \cdot \sin(at) - a\cos(at)]$$

$$\int e^{-st} \cos(at)dt = \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}[-s \cdot \cos(at) + a\sin(at)]$$

.2 $L[ag(t)+bh(t)] = aL[g(t)] + bL[h(t)]$

$$L^{-1}\left[aG(s)+bH(s)\right] = aL^{-1}[G(s)] + bL^{-1}[H(s)]$$

Examples : $L[2\sin t + 5t^2] = 2L[\sin t] + 5L[t^2]$; $L^{-1}\left[\frac{4}{s} + 5e^{-s}\right] = 4L^{-1}[\frac{1}{s}] + 5L^{-1}[e^{-s}]$

.3 $L^{-1}[F(s)] = e^{-at}L^{-1}[f(s-a)]$

$$L^{-1}[F(s)] = e^{at}L^{-1}[f(s+a)]$$

Examples : $L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2+4}] = e^{-2t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}]$; $L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2+4}] = e^{2t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}]$

.4

$$L\left[ay'(t)+by(t)\right]=Y(s)[as+b]-y(0)[a]$$

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^2+bs+c]-y(0)[as+b]-y'(0)[a]$$

$$L\left[ay'''(t)+by''(t)+cy'(t)+dy(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^3+bs^2+cs+d]-y(0)[as^2+bs+c]-y'(0)[as+b]-y''(0)[a]$$

$$L\left[ay''''(t)+by'''(t)+cy''(t)+dy'(t)+ey(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^4+bs^3+cs^2+ds+e]-y(0)[as^3+bs^2+cs+d]-y'(0)[as^2+bs+c]-y''(0)[as+b]-y'''(0)[a]$$

<u>פתרון מד״ר באמצעות התמרת לפלס:</u>

נתונה מד״ר מהצורה $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=g(t)$ עם תנאי התחלה $y(0)=y_0\ ;\ y'(0)=y_1$.

<u>שלב I</u>

מפעילים את התמרת לפלס על שני אפי המשוואה ומקבלים :

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=L\left[g(t)\right]$$

מכאן : $Y(s)[as^2+bs+c]-y_0[as+b]-y_1[a]=G(s)$

<u>שלב II</u>

מבודדים מהמשוואה האחרונה את $Y(s)$ ומקבלים :

$$Y(s)=\frac{G(s)+y_0[as+b]+y_1[a]}{as^2+bs+c}$$

<u>שלב III</u>

מבצעים התמרת לפלס הפוכה לשני האגפים של המשוואה האחרונה ומקבלים את $y(t)$:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)+y_0[as+b]+y_1[a]}{as^2+bs+c}\right]$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(\text{for} n = 1, 2, 3\ldots)\, t^n$
$\frac{1}{s^n}$	$(\text{for} n = 1, 2, 3\ldots)\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at) + at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$
$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}

$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at)-at\cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות:

.1
נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$ של פונקציה $f(t)$
ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

.2קונוולוציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

פתרון מד"ר בעזרת טורים - נקודה רגולרית

נתונה מד"ר מסדר שני : $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)=r(x)$

שלב I

מציבים במד"ר :

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+...$$
$$+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+...$$
$$+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+(n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+...$$
$$+(n-2)(n-3)a_{n-2}x^{n-4}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

שלב II

משווים את המקדם של x^n באגף ימין עם המקדם של x^n באגף שמאל ומקבלים נוסחת נסיגה עבור a_n.

שלב III

במידה ונוסחת הנסיגה לא נותנת את כל המקדמים $a_0,a_1,...$ משווים מקדמים של חזקות שוות בשני האגפים (מהחזקה הקטנה ביותר ומעלה) עד לקבלת כל המקדמים הדרושים.

הערות :

1. אם במד"ר המקורית מופיעה פונקציה שהיא איננה פולינום, מחליפים אותה בטור מקלורן שלה. (רשימת טורים בעמוד האחרון בחוברת www.gool.co.il/hedva1.pdf).

2. שים לב כי בהינתן תנאי התחלה, מתקיים : $y(0)=a_0\ ,\ y'(0)=a_1$.
   במידה ולא נתון תנאי התחלה אנו מניחים ש- a_0 ו- a_1 ידועים ומבטאים את יתר המקדמים בעזרתם.

3. באופן דומה פותרים מד"ר מכל סדר בעזרת טורים. בהקשר זה יש לזכור כי , $y''(0)=2!a_2\ ,\ y'''(0)=3!a_3\ ,y''''(0)=4!a_4\ ,...,y^{(n)}(0)=n!a_n$.

פתרון מערכת מד"ר כללית 2X2 - שיטת החילוץ

נתונות שתי משוואות עם פונקציות $y(x)$ ו- $z(x)$ כך שלפחות אחת מהן משוואה דיפרנציאלית.

אסטרטגיית הפתרון :

נחלץ את אחת הפונקציות ממשוואה אחת ונציב במשוואה השנייה.

במידה והתהליך אינו מתאפשר ניתן לגזור את המשוואות.למשל, אם נתונה המערכת

$$\begin{cases} y''+2z'=e^{3x} & (1) \\ y'-z''+3z=x^2 & (2) \end{cases}$$

נגזור את המשוואה השנייה. נחלץ מהמשוואה השנייה את y'' ונציב אותו במשוואה הראשונה.

פתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון - שיטת הלכסון

מערכת הומוגנית:

מערכת מהצורה :

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

או בכתיב מטריצות :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{\underline{x}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}(t)}$$

<u>אלגוריתם פתרון</u> :

<u>שלבI</u>

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה A : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (ה-ע"ע לא בהכרח שונים).

<u>שלב II</u>

מצא את הוקטורים העצמיים של המטריצה A : $v_1, v_2, \ldots, v_n$

שלב III

$$\underline{x}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}v_1+c_2e^{\lambda_2 t}v_2+...+c_ne^{\lambda_n t}v_n$$

מערכת לא הומוגנית:

מערכת מהצורה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}}_{\underline{x}'(t)}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x(t)}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

<u>אלגוריתם פתרון (וריאציית פרמטרים):</u>

הפתרון הכללי של המערכת הלא הומוגנית $(\underline{x}(t))$ הוא הסכום של הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה $(\underline{x}_h(t))$ ופתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית $(\underline{x}_p(t))$.

כלומר: $\underline{x}(t)=\underline{x}_h(t)+\underline{x}_p(t)$

<u>שלבI</u>

פתור את המערכת ההומוגנית המתאימה ונקבל: $\underline{x}_h(t)=c_1\underbrace{e^{\lambda_1 t}v_1}_{\underline{x}_1}+c_2\underbrace{e^{\lambda_2 t}v_2}_{\underline{x}_2}+...+c_n\underbrace{e^{\lambda_n t}v_n}_{\underline{x}_n}$

<u>שלב II</u>

פתור את מערכת המשוואות הבאה עבור הנעלמים $C_1'(t),C_2'(t),...,C_n'(t)$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \vdots & \underline{x}_n \\ | & | & | & | \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

<u>שלב III</u>

בצע אינטגרציה לקבלת $C_1(t),C_2(t),...,C_n(t)$

<u>שלב IV</u>

הפתרון הפרטי הוא: $\underline{x}_p(t)=C_1(t)\cdot e^{\lambda_1 t}v_1+C_2(t)\cdot e^{\lambda_2 t}v_2+...+C_n(t)\cdot e^{\lambda_n t}v_n$

הערה: האלגוריתם הנ"ל עובד אם ורק אם למטריצה יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים.

פתרון נומרי (מקורב) של מד"ר מסדר ראשון (שיטת רונגה-קוטה)

נתונה מד"ר מסדר ראשון $y' = f(x, y)$.

נתון : $y(x_0) = y_0$

מחפשים : $y(x_1)$

תשובה: $y(x_1) = y_0 + k$

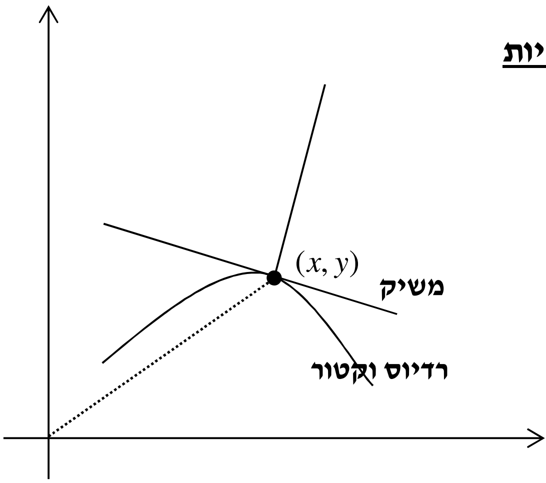
כאשר :

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$$
$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$h = x_1 - x_0$$

בעיות מילוליות גיאומטריות



נורמל

$\frac{dy}{dx}$ שיפוע המשיק לעקום בנקודה (x,y).

$-\frac{dx}{dy}$ שיפוע הנורמל לעקום בנקודה (x,y).

$\frac{y}{x}$ שיפוע רדיוס וקטור.

$y_1 - y = \frac{dy}{dx}(x_1 - x)$ משוואת המשיק לעקום בנקודה (x,y) באשר $(x_1 y_1)$ נקודה כלשהי על המשיק.

$y_1 - y = -\frac{dx}{dy}(x_1 - x)$ משוואת הנורמל לעקום בנקודה (x,y) באשר $(x_1 y_1)$ נקודה כלשהי על הנורמל.

חיתוך המשיק עם ציר x וציר y בהתאמה: $x - y\frac{dx}{dy}$ ו- $y - x\frac{dy}{dx}$

חיתוך הנורמל עם ציר x וציר y בהתאמה: $x + y\frac{dy}{dx}$ ו- $y + x\frac{dx}{dy}$

השטח בין עקום $y(x)$ לבין ציר x בתחום $a \le x \le b$ הוא $\int_a^b y(x)dx$.

השטח בין עקום $y(x)$ לבין ציר x בתחום $a \le x \le b$ מסתובב סביב ציר x. הנפח: $\pi\int_a^b y^2(x)dx$

מציאת מסילות אורתוגונליות למשפחת עקומות

נתונה משפחת עקומות $F(x,y,c)=0$ למציאת משפחת העקומות האורתוגונליות:

א. גזור את המשוואה (בדומה לגזירה סתומה)

ב. החלף את $\frac{dy}{dx}$ ב- $-\frac{dx}{dy}$.

ג. פתור את המד"ר שהתקבלה.

מציאת מסילות בזוית θ למשפחת עקומות

נתונה משפחת עקומות $F(x,y,c)=0$ למציאת משפחת העקומות בזוית θ :

א. גזור את המשוואה (בדומה לגזירה סתומה)

ב. החלף את $\frac{dy}{dx}$ ב- $\frac{y'-\tan\theta}{1+y'\tan\theta}$.

ג. פתור את המד"ר שהתקבלה.

פרק 5 – מספרים מרוכבים

ידע מוקדם: חקירת משוואה ריבועית, זהויות ומשוואות טריגונומטריות, משוואות מעריכיות, סדרות (חשבוניות והנדסיות), מציאת מקומות גיאומטריים (גיאומטריה אנליטית).

הגדרה: $i=\sqrt{-1}$ **מספר מרוכב:** $z=a+bi$ (a ו- b ממשיים)

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\operatorname{Re}(z)$

bi נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\operatorname{Im}(z)$

המספר הצמוד: $\bar{z}=a-bi$

מספר מרוכב בהצגה קוטבית: $z=Rcis\theta$

מעבר מהצגה אלגברית להצגה קוטבית: $\tan\theta=\frac{b}{a}\ \ ,\ \ R=\sqrt{a^2+b^2}$

מעבר מהצגה קוטבית להצגה אלגברית: $b=R\sin\theta\ \ ,\ \ a=R\cos\theta$

$|z|$ - גודלו של המספר המרוכב z. מתקיים: $|z|=R=\sqrt{a^2+b^2}$

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

$$z_1\cdot z_2=(R_1cis\theta_1)\cdot(R_2cis\theta_2)=R_1R_2cis(\theta_1+\theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{R_1cis\theta_1}{R_2cis\theta_2}=\frac{R_1}{R_2}cis(\theta_1-\theta_2)$$

משפט דה-מואבר: $(Rcis\theta)^n=R^n cis(n\theta)$

השורשים מסדר n של מספר מרוכב: $z^n=Rcis\theta\ \Rightarrow\ z_k=\sqrt[n]{R}cis\left(\frac{\theta}{n}+\frac{360^o k}{n}\right)$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		ידע מקדים, רקע היסטורי, הגדרת i
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	הכרות עם המספר המרוכב $z=a+bi$
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8	תרגיל 7	חיבור, חיסור וכפל במספרים מרוכבים
סרטון 9		המספר הצמוד
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	חילוק מספרים מרוכבים
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	כולל שוויון בין מספרים מרוכבים והצבת $z=a+bi$ כשיטה לפתרון משוואות מרוכבות
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17	תרגיל 15 א'	
סרטון 18	תרגיל 15 ב'	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22		חקירת משוואה ריבועית מרוכבת
סרטון 23	תרגיל 19	
סרטון 24		מישור גאוס, הצגה קוטבית של מספר מרוכב, מעבר מהצגה קוטבית של

		מספר מרוכב להצגתו האלגברית
סרטון 25	תרגיל 20	
סרטון 26		מעבר מהצגה אלגברית של מספר מרוכב להצגתו הקוטבית
סרטון 27	תרגיל 21	
סרטון 28		פעולות חשבון בהצגה קוטבית
סרטון 29	תרגיל 22	
סרטון 30	תרגיל 23	
סרטון 31	תרגיל 24	
סרטון 32	תרגיל 25	
סרטון 33	תרגיל 26	
סרטון 34	תרגיל 27	
סרטון 35	תרגיל 28	
סרטון 36	תרגיל 29	
סרטון 37	תרגיל 30	
סרטון 38	תרגיל 31	
סרטון 39		משפט דה-מואבר
סרטון 40	תרגיל 32	
סרטון 41		הוצאת שורש מסדר n של מספר מרוכב
סרטון 42	תרגיל 33	
סרטון 43		משוואת היחידה, שורשי היחידה, סכום ומכפלת שורשי היחידה
סרטון 44	סרטון 34	
סרטון 45	תרגיל 35	שאלה על מקום גיאומטרי (לראשונה)
סרטון 46	תרגיל 36	
סרטון 47	תרגיל 37	
סרטון 48		תזכורת בנושא סדרות
סרטון 49	תרגיל 38	
סרטון 50	תרגיל 39 א'	
סרטון 51	תרגיל 39 ב'	
סרטון 52	תרגיל 40	
סרטון 53	תרגיל 41	
סרטון 54	תרגיל 42	
סרטון 55	תרגיל 43	פתרון בדרך הצגה טריגונומטרית
סרטון 56	תרגיל 43	פתרון בדרך הצגה אלגברית
סרטון 57	תרגיל 44	
סרטון 58	תרגיל 45	
סרטון 59	תרגיל 46	
סרטון 60	תרגיל 47	
סרטון 61	תרגיל 48	
סרטון 62	תרגיל 49	פתרון בדרך הצגה טריגונומטרית
סרטון 63	תרגיל 49	פתרון בדרך הצגה אלגברית
סרטון 64	תרגיל 50	

<u>תרגילים:</u>

1. רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ **ב.** $\sqrt{-4}=$ **ג.** $\sqrt{-25}=$ **ד.** $\sqrt{-3}=$ **ה.** $\sqrt{-5}=$

2. חשב:

א. $i=$ **ב.** $i^2=$ **ג.** $i^3=$ **ד.** $i^4=$ **ה.** $i^5=$ **ו.** $i^{17}=$

3. רשום את ערכם של a **ו-** b **עבור המספרים המרוכבים הבאים:**

א. $2+5i$ **ב.** $3-i$ **ג.** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ **ד.** $7i$ **ה.** -4 **ו.** 0

4. פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$ ב. $x^2+36=0$ ג. $x^2-2x+5=0$

5. פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$

6. פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$

7. נתון: $z_1=2+3i \ , \ z_2=5-2i$. חשב:

א. $z_1+z_2=$ ב. $z_1-z_2=$ ג. $z_1\cdot z_2=$

8. רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

9. חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}=$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}=$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}=$

10. פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$

11. פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$

12. פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$$

13. פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$ ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

14. פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\overline{z}-3$

15. חשב:

א. $\sqrt{5-12i}=$ ב. $\sqrt{8+6i}=$

16. פתור את המשוואה הבאה: $z^2-2(1-2i)z-8i=0$

17. פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$

18. פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\overline{z}+6=0$

19. נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה: א. יש פתרון יחיד. ב. אין פתרון.

20. הפוך להצגה אלגברית:

א. $2cis60^o=$ ב. $6cis135^o=$ ג. $4cis330^o=$ ד. $4cis\left(-30^o\right)=$

ה. $4cis690^o=$ ו. $8cis90^o=$ ז. $3cis270^o=$ ח. $cis180^o=$ ט. $cis0^o=$

21. הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i=$ ב. $\sqrt{3}-i=$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=$ ד. $3+4i=$ ה. $6i=$ ו. $-i=$

ז. $4=$ ח. $-1=$ ט. $1=$ י. $0=$

22. **חשב:**

א. $2cis120^o \cdot 3cis60^o =$ **ב.** $cis210^o \cdot 5cis\left(-40^o\right) =$ **ג.** $\frac{12cis315^o}{3cis90^o} =$

ד. $\frac{1}{2cis40^o} =$ **ה.** $6cis30^o + 2cis210^o =$

23. **נתון המספר המרוכב** $z = Rcis\theta$**. הבע באמצעות** R **ו-** θ **את המספרים:**

א. $\overline{z} =$ **ב.** $\frac{1}{z} =$ **ג.** $-z =$ **ד.** $-\frac{1}{\overline{z}} =$ **ה.** $iz =$ **ו.** $z \cdot \overline{z} =$

24. **הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:**

א. $z+\overline{z}$ **ב.** $z\cdot\overline{z}$ **ג.** $\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}$

25. **הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:**

א. $z^2-\overline{z}^2$ **ב.** $\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}$

26. **הוכח:**

א. $z-i\overline{z}=\overline{\overline{z}+iz}$ **ב.** $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

27. **מצא את קודקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו** $\sqrt{2}$ **במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.**

28. **ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא** $1+\sqrt{3}i$**. מצא את קודקודיו האחרים.**

29. **משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא** $1+\sqrt{3}i$**. מצא את קודקודיו האחרים.**

30. **משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא** 30^o **חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קודקוד הראש של המשולש הוא** $1+\sqrt{3}i$**. מצא את קודקודיו האחרים.**

31. z **הוא מספר מרוכב במישור גאוס, שנמצא מחוץ למעגל היחידה.**
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\overline{z}$ **ב.** $\frac{1}{z}$ **ג.** $\frac{z}{\overline{z}}$ **ד.** $z\cdot\overline{z}$

32. **חשב:**

א. $\left(2cis30^o\right)^3 =$ **ב.** $\left(2cis14^o\right)^5 =$ **ג.** $(1+i)^4 =$ **ד.** $\left(\sqrt{3}-i\right)^3 =$

ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15} =$

33. **פתור את המשוואות הבאות:**

א. $z^2 = 36cis120^o$ **ב.** $z^4 = \left(9cis80^o\right)^2$ **ג.** $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

34. **מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.**

35. **נתון המספר המרוכב** $z = x+yi$**. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל עבור המשוואה:** $|z| = 2$

36. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל עבור המשוואה: $|z-3i| = 5$

37. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל עבור המשוואה: $|z+i| + |\overline{z}+i| = |1+3i|$

38. בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5-9i$.
מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

39. בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2-4i$.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

40. נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2.
נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית.
מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

41. פתור את המשוואה: $z - \overline{z} + |z| = |2-i|^2 - 4i + \mathrm{Im}(z)$

42. פתור את המשוואה: $\left|2 - 3^{x^2-x-1} i\right| = \sqrt{13}$

43. פתור את המשוואה: $z^3 = \overline{z}$

44. הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

45. נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

46. נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z - \frac{1}{\overline{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

47. הוכח את הנוסחה: $R_1 cis\theta_1 \cdot R_2 cis\theta_2 = R_1 R_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$

48. z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$
מצא את $\arg(z)$.

49. z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה. מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

50. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$.
מצא את גודל הזווית $\measuredangle z_1 o z_2$ (O ראשית הצירים).

__פתרונות:__

1. א. i. **ב.** $2i$. **ג.** $5i$. **ד.** $\sqrt{3}i$. **ה.** $\sqrt{5}i$. **2. א.** i. **ב.** -1. **ג.** $-i$. **ד.** 1. **ה.** i.
ו. i. **3. א.** $a=2$, $b=5$. **ב.** $a=3$, $b=-1$. **ג.** $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. **ד.** $a=0$, $b=7$.
ה. $a=-4$, $b=0$. **ו.** $a=0$, $b=0$. **4. א.** $x=\pm i$. **ב.** $x=\pm 6i$. **ג.** $x=1+2i, 1-2i$.
5. $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$. **6.** $z=2i, -3i$. **7. א.** $7+i$. **ב.** $-3+5i$. **ג.** $16+11i$.

8. א. $2-5i$. ב. $3+i$. ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. ד. $-7i$. ה. -4. ו. 0. 9. א. $-1+i$.

ב. $4+3i$. ג. $5+3i$. 10. $z=4-i$. 11. $z=4+5i$. 12. $z=2-3i$, $w=5+i$.

13. א. $a=5$, $b=-3$. ב. $a=2$, $b=-1$. 14. $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$. 15. א. $z=\pm(3-2i)$.

ב. $z=\pm(3+i)$. 16. $z_1=2$, $z_2=-4i$. 17. $z_1=-2-5i$, $z_2=3i$.

18. $z_1=-3i$, $z_2=2i$. 19. א. $m=-i$. ב. $m=-2i$. 20. א. $1+\sqrt{3}i$.

ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$. ג. $2\sqrt{3}-2i$. ד. $2\sqrt{3}-2i$. ה. $8i$. ו. $-3i$. ז. -1. ח. -1.

ט. 1. 21. א. $\sqrt{2}cis45°$. ב. $2cis330°$. ג. $cis240°$. ד. $5cis3.13°$. ה. $6cis90°$.

ו. $cis270°$. ז. $4cis0°$. ח. $cis180°$. ט. $cis0°$. י. 0. 22. א. -6. ב. $5cis170°$.

ג. $4cis225°$. ד. $\frac{1}{2}cis(-40°)$. ה. $4cis30°$. 23. א. $Rcis(-\theta)$. ב. $\frac{1}{R}cis(-\theta)$.

ג. $Rcis(180°+\theta)$. ד. $\frac{1}{R}cis(180°+\theta)$. ה. $Rcis(90°+\theta)$. ו. R^2.

27. $1+i,-1+i,-1-i,1-i$. 28. $-\sqrt{3}+i,-1-\sqrt{3}i,\sqrt{3}-i$. 29. $1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2$.

30. $1+\sqrt{3}i,-1+\sqrt{3}i,2$. 31. א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל. ג. על המעגל.

ד. מחוץ למעגל. 32. א. $8i$. ב. $32cis70°$. ג. -4. ד. $-8i$. ה. 1.

33. א. $z_0=6cis60°$, $z_1=6cis240°$.

ב. $z_0=3cis40°$, $z_1=3cis130°$, $z_2=3cis220°$, $z_3=3cis310°$.

ג. $z_0=cis12°$, $z_1=cis84°$, $z_2=cis156°$, $z_3=cis228°$, $z_4=cis300°$. 34. סכום: 0,

מכפלה: -1. 35. $x^2+y^2=4$. 36. $x^2+(y-3)^2=25$.

37. $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$. 38. $S_{10}=75-15i$. 39. א. $a_1=2+i$, $q=-2i$. ב. $S_5=20+25i$.

40. $2,2i,-2$ או $2,4-2i,6-8i$. 41. $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$. 42. $x=2,-1$.

43. $z_1=0,z_2=1,z_3=i,z_4=-1,z_5=-i$. 44. $z_1=0,z_2=i,z_3=-i,z_4=1,z_5=-1$.

48. $\arg(z)=30°$. 49. $z+iz=\sqrt{2},-\sqrt{2}$. 50. 2θ.